$$8x^1x^2 + \theta(\theta+4\varepsilon)(x^4)^2 = 0,\ x^3 = 0. \qquad (2.15)$$

В пересечении квадрики (A_4), соответственно (B^*), плоскостью $x^4 = 0$ получаем коники

$$2(\theta+\varepsilon)^2 x^1x^2 - \theta(\theta+2\varepsilon)(x^3)^2 = 0,\ x^4 = 0, \qquad (2.16)$$

$$8(\theta+\varepsilon)^2 x^1x^2 - \theta(3\theta+4\varepsilon)(x^3)^2 = 0,\ x^4 = 0. \qquad (2.17)$$

Из уравнений этих коник видно, что они касаются соответственно коник C_2 и C_1 в точках A_1 и A_2.

Литература

1. Малаховский В.С., Расслояемые пары конгруэнций фигур. Труды геометрического семинара, т.3, 1971.

2. С.П. Фиников, Теория пар конгруэнций, 1956. ГИТТЛ, М.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 4. 1974

Скрыдлова Е.В.

КОНГРУЭНЦИИ $(CP)_{2,1}$.

В трехмерном проективном пространстве рассматриваются конгруэнции $(CP)_{2,1}$ - вырожденные конгруэнции [1] пар фигур, коник C и точек P, в которых многообразие коник C является двупараметрическим (конгруэнцией), а многообразие точек P — однопараметрическим (линией). Предполагается, что плоскости коник C также образуют конгруэнцию. Выделены два типа конгруэнций $(CP)_{2,1}$, для каждого из которых построен геометрически фиксированный репер. Исследованы некоторые частные классы конгруэнций $(CP)_{2,1}$.

§1. Репер конгруэнции $(CP)_{2,1}$.

Каждой конике C конгруэнции $(CP)_{2,1}$ соответствует единственная точка P линии (P), с другой стороны, каждой точке P ставится в соответствие однопараметрическое семейство коник C. Пусть $\mathcal{L}_P$ - характеристика семейства плоскостей этих коник.

Конгруэнции $(CP)_{2,1}$ назовем конгруэнциями типа I или II в зависимости от того, пересекает ли прямая $\mathcal{L}_P$ соответствующую ей конику C или касается её.

Построим репер конгруэнции $(CP)_{2,1}$ типа I. Выберем некоторую конику C и соответствующую ей точку P. Вершину A_4 аналитического тетраэдра $(A_1A_2A_3A_4)$ совместим с P, A_3 поместим в полюс прямой относительно коники C; A_1, A_2 – в точки пересечения прямой $\mathcal{L}_P$ с коникой.

В репере конгруэнции $(CP)_{2,1}$ типа II вершина A_4 является точкой P, вершина A_1 – точкой касания характеристики $\mathcal{L}_P$ с исходной коникой C, A_2 – произвольным фокусом коники C, A_3 – полюсом прямой A_1A_2 относительно этой коники.

Имеем:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4) \qquad (1)$$

где ω_α^β – формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \qquad (2)$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \qquad (3)$$

Уравнения коники C относительно построенных реперов с учетом соответствующей нормировки имеют вид:

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \ x^4 = 0. \qquad (4)$$

§2. Конгруэнции $(CP)_{2,1}$ типа I.

Исключая случай пересечения касательной к линии (P) в точке P с характеристикой $\mathcal{L}_P$ можно принять формы

$$\omega_4^3 = \omega_1, \ \omega_3^4 = \omega_2 \qquad (5)$$

в качестве базисных форм данной конгруэнции. Тогда система пфаффовых уравнений конгруэнций $(CP)_{2,1}$ типа I в построенном репере будет иметь вид:

$$\begin{gathered} \omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_i^4 = b_i\omega_1, \\ \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k, \quad \omega_4^i = a^i\omega_1, \ 2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = c^k\omega_k. \end{gathered} \qquad (6)$$

Здесь и в дальнейшем $i, j, k = 1,2$; $i \neq j$ и суммирование по индексам i, j не производится.

Из (6) следует, что конгруэнции $(CP)_{2,1}$ типа I определяются с произволом семи функций двух аргументов.

Теорема I. Прямолинейные конгруэнции $(\mathcal{L}_P)$, (A_iA_4), (A_3A_4), ассоциированные с конгруэнциями $(CP)_{2,1}$ типа I имеют по одному семейству соответствующих торсов.

Доказательство. Торсы этих прямолинейных конгруэнций определяются соответственно уравнениями

$$\omega_1(b_2\omega_1^3 - b_1\omega_2^3) = 0,$$

$$\omega_1(\omega_i^j - a^j\omega_i^3) = 0,$$

$$\omega_1(a^2\omega_3^1 - a^2\omega_3^2) = 0,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Рассмотрим задачу расслоения от конгруэнции коник C к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) с одновременным расслоением прямолинейных конгруэнций (A_1A_2), (A_3A_4) в направлении от (A_3A_4) к (A_1A_2). Аналитически такие расслоения характеризуются формулами:

$$\Gamma_3^{11}\Gamma_1^{32}-\Gamma_3^{12}\Gamma_1^{31}+\Gamma_3^{21}\Gamma_2^{32}-\Gamma_3^{22}\Gamma_2^{31}=0,$$

$$\Gamma_3^{11}\Gamma_2^{12}-\Gamma_3^{12}\Gamma_2^{11},\quad \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{12}-\Gamma_2^{32}\Gamma_3^{11}=0,$$

$$c^1\Gamma_3^{12}-c^2\Gamma_3^{11}-2a^1-\Gamma_3^{21}\Gamma_2^{12}+\Gamma_3^{22}\Gamma_2^{11}=0,$$

$$\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12}-\Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11}-\Gamma_2^{31}\Gamma_3^{22}+\Gamma_2^{32}\Gamma_3^{21}+2(\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22}-\Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21})=0, \qquad (7)$$

$$c^1\Gamma_3^{22}-c^2\Gamma_3^{21}-2a^1-\Gamma_3^{11}\Gamma_1^{22}+\Gamma_3^{12}\Gamma_1^{21}=0,$$

$$\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{22}-\Gamma_1^{32}\Gamma_3^{21}=0,\quad \Gamma_1^{21}\Gamma_3^{22}-\Gamma_1^{22}\Gamma_3^{21}=0,$$

$$a^1\Gamma_1^{32}+a^2\Gamma_2^{32}=0,\qquad b_1\Gamma_3^{12}+b_2\Gamma_3^{22}=0.$$

Т е о р е м а 2. Существует только два проективно неэквивалентных класса расслояемых конгруэнций $(CP)_{2,1}$ типа I -конгруэнции A ,определяемые с произволом одной функции двух аргументов и конгруэнции B ,определяемые с произволом девяти функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие невырождения прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) в линейчатую поверхность имеет вид:

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix}\Gamma_3^{11} & \Gamma_3^{21} & a^1 & a^2\\ \Gamma_3^{12} & \Gamma_3^{22} & 0 & 0\end{Vmatrix}=2 \qquad (8)$$

Учитывая (8),исследование системы (7) удобно проводить отдельно в каждом из четырех случаев

1) $\omega_3^1=0,\ \omega_3^2\neq 0$; 2) $\omega_3^1\neq 0,\ \omega_3^2=0$;
3) $\omega_3^1\wedge\omega_3^2=0,\ \omega_3^1\neq 0,\ \omega_3^2\neq 0$; 4) $\omega_3^1\wedge\omega_3^2\neq 0$.

В первом случае система пфаффовых уравнений (6) с учетом условий расслоения (7) приводится к виду

$$\omega_1^2=p\,\omega_3^2,\quad \omega_1^3=q\,\omega_3^2,\quad \omega_1^4=b\,\omega_1,\quad \omega_2^1=0,$$

$$\omega_2^3=0,\quad \omega_2^4=0,\quad \omega_3^2=\lambda^k\omega_k,\quad \omega_3^1=0,\quad \omega_4^1=0, \qquad (9)$$

$$\omega_4^2=a\,\omega_1,\quad 2\,\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=c^k\omega_k,$$

причем

$$c^1\lambda^2-c^2\lambda^1-2a=0. \qquad (10)$$

Класс расслояемых конгруэнций $(CP)_{2,1}$ типа I,определяемый системой (9),(10),назовем классом A .Он существует с произволом одной функции двух аргументов.

Исследование второго случая приводит к классу,проективно эквивалентному классу A .

В третьем случае получим следующую систему пфаффовых и конечных уравнений:

$$\omega_1^2=p\,\omega_3^2,\quad \omega_1^3=q\,\omega_3^2,\quad \omega_1^4=-\mu\,\omega_2^4,\quad \omega_2^1=r\,\omega_3^1,$$

$$\omega_2^3=-q\,\omega_3^1,\quad \omega_2^4=b\,\omega_1,\quad \omega_3^1=\Gamma_3^{1k}\omega_k,\quad \omega_2^3=\mu\,\omega_3^1, \qquad (11)$$

$$\omega_4^1=a\,\omega_1,\quad \omega_4^2=\mu\,\omega_4^1,\quad 2\,\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=c^k\omega_k.$$

$$c^1\Gamma_3^{12}-c^2\Gamma_3^{11}-2a=0. \qquad (12)$$

Конгруэнции,определяемые системой (II)-(I2),назовем конгруэнциями B

Замыкая и продолжая систему (II)-(I2) находим произвол существования конгруэнций B —девять функций одного аргумента.

И, наконец, в случае $\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 \neq 0$ система (6), (7) оказывается несовместной. Таким образом, теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Конгруэнции A обладают следующими геометрическими свойствами:

1) точка A_2 неподвижна,

2) точка A_1 является фокусом луча A_1A_4 прямолинейной конгруэнции (A_1A_4). Конгруэнции $(A_1A_3),(A_1A_4)$ имеют по одному семейству соответствующих торсов,

3) характеристическая точка грани $(A_1A_3A_4)$ принадлежит прямой A_1A_3,

4) точка A_2 является строенным фокусом конгруэнции коник C,

5) пара прямолинейных конгруэнций $(A_1A_2),(A_3A_4)$ двусторонне расслояема,

6) поверхность (A_3) и линия (P) являются плоскими.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) Утверждение теоремы непосредственно следует из системы (9):

$$dA_2 = \omega_2^2 A_2 .$$

2) Фокусы sA_1+tA_2 луча A_1A_4 конгруэнции (A_1A_4) определяются уравнением

$$\lambda^2 st\,(aq-p) .$$

Для определения торсов конгруэнций $(A_1A_3)(A_1A_4)$ получаем уравнения:

$$\omega_3^2(p\omega_2 - b\omega_1) = 0 ,$$

$$(p-aq)\,\omega_1\omega_3^2 = 0 .$$

Утверждения теоремы следуют из этих уравнений.

3) Характеристическая точка M плоскости $(A_1A_3A_4)$ определяется формулой

$$M = pA_3 - A_1 .$$

4) Фокальные точки коники C определяются уравнением:

$$(x^1)^3\left[\alpha(x^1)^3+\beta(x^1)^2x^2+\gamma x^1(x^2)^2+\delta(x^2)^3\right],$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ —не равные нулю величины. Отсюда следует, что A_2 является строенным фокусом коники C.

5) Для конгруэнций A по условию существует одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) к конгруэнции (A_1A_2). Следовательно, достаточно установить расслояемость этой пары конгруэнций в обратном направлении. Условия расслоения

$$\omega_2^1\wedge\omega_3^1=0,\ \omega_1^3\wedge\omega_3^2=0,\ \omega_1^3\wedge\omega_3^1-\omega_2^3\wedge\omega_3^2=0,$$

удовлетворяются в силу системы (II), т.е. пара конгруэнций $(A_1A_2),(A_3A_4)$ действительно двусторонне расслояема.

6) Имеем:

$$dA_3=\omega_3^2A_2+\omega_3^3A_3+\omega_3^4A_4 ,$$

причем

$$d[A_2A_3A_4]=(\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4)[A_2A_3A_4] .$$

Следовательно плоскость $[A_2 A_3 A_4]$ неподвижна и поверхность (A_3) совпадает с ней.

Так как при любом n

$$(d^n P, A_2, A_3, A_4) = 0,$$

то кривая (P) -плоская.

Т е о р е м а 4. Для конгруэнций B справедливы следующие утверждения:

1)конгруэнция $(A_1 A_2)$ представляет собой связку прямых с центром в точке $A_1 + \mu A_2$.

2)поверхность (A_3) и кривая (P) -плоские, причем кривая (P) лежит в плоскости (A_3),

3)пара прямолинейных конгруэнций $(A_1 A_2), (A_3 A_4)$ двусторонне расслоема,

4)точки (A_1) и (A_2) являются фокусами прямолинейных конгруэнций $(A_1 A_4)$ и $(A_2 A_4)$ соответственно. Торсы этих конгруэнций соответствуют,

5)вершина A_4 репера является двойная точка гомографии [2] для пар поверхностей $(A_1),(A_3)$ и $(A_2),(A_3)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1)Имеем:

$$d[A_1 + \mu A_2] = (\omega_1^1 + \mu \omega_2^1)[A_1 + \mu A_2],$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Пункты 2), 3) доказываются так же, как и в теореме 3 (6), 5) соответственно).

4)Фокусы $sA_i + tA_4$ луча $A_i A_4$ прямолинейной конгруэнции $(A_i A_4)$ определяются уравнением:

$$\varphi s t = 0,$$

где φ -не равный нулю коэффициент. Координаты точки удовлетворяют этому уравнению, следовательно, A_i -фокус. Торсы конгруэнции $(A_i A_4)$ определяются уравнением:

$$\varphi \omega_1 \omega_3^1 = 0,$$

откуда следует утверждение теоремы.

5)Имеем

$$dA_1\big|_{\omega_3^1=0} = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^4 A_4,$$

$$dA_2\big|_{\omega_3^1=0} = \omega_2^2 A_2 + \omega_2^4 A_4,$$

$$dA_3\big|_{\omega_3^1=0} = \omega_3^3 A_3 + \omega_2 A_4,$$

что и требовалось доказать.

§3. Конгруэнции $(CP)_{2,1}$ типа II.

Не умаляя общности можно считать, что касательная к кривой (P) в точке P не пересекает ребро $(A_1 A_2)$ репера. Тогда формы

$$\omega_4^3 = \omega_1, \quad \omega_2^4 = \omega_2 \tag{13}$$

можно считать линейно независимыми формами конгруэнций $(CP)_{2,1}$ типа II. Система уравнений Пфаффа, определяющая эти конгруэнции имеют вид:

$$\omega_1^2 = \Gamma_1^{2k}\omega_k,\ \omega_2^1 = \rho\omega_2^1,\ \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k,\ \omega_1^4 = b\omega_1,$$

$$\omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k,\ \omega_3^4 = c\omega_1,\ \omega_4^i = a^i\omega_1,\ 2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = \lambda^k\omega_k. \tag{14}$$

Система (I4) определяет конгруэнции $(CP)_{2,1}$ типа II с произволом шести функций двух аргументов. Для этих конгруэнций справедлива теорема I.

Рассмотрим расслояемые конгруэнции типа II- конгруэнции, обладающие следующими свойствами:

I) существует расслоение от конгруэнции коник C к прямолинейной конгруэнции (A_2A_4),

2) пара прямолинейных конгруэнций (A_2A_3) и (A_1A_4) двусторонне расслояема.

Условия I), 2) налагают следующие связи на коэффициенты системы уравнений (I4):

$$\rho(2\Gamma_3^{11} - \Gamma_2^{31}) = 0,\ \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{12} - \Gamma_2^{32}\Gamma_3^{11} - \lambda^1\rho - a^1 = 0,$$

$$\Gamma_3^{21} - \Gamma_1^{31}\rho + \tfrac{1}{2}(\lambda^1\Gamma_2^{32} - \lambda^2\Gamma_2^{31}) - 1 = 0,$$

$$\Gamma_1^{31}\Gamma_2^{32} - \Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31} + \Gamma_1^{21}\rho + \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{22} - \Gamma_2^{32}\Gamma_3^{21} = 0,$$

$$\Gamma_1^{21}\Gamma_2^{32} - \Gamma_1^{22}\Gamma_2^{31} = 0,\ \Gamma_3^{11}\Gamma_1^{22} - \Gamma_3^{12}\Gamma_1^{21} = 0, \tag{15}$$

$$\rho\Gamma_1^{21} = 0,\ \rho\Gamma_1^{31} + 1 = 0,\ a^2\rho + \Gamma_3^{12} = 0,$$

$$\Gamma_1^{21} - c\Gamma_1^{32} = 0,\ \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12} - \Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11} - a^2 = 0.$$

Условия невырождения прямолинейных конгруэнций (A_2A_4) (A_1A_4), (A_2A_3) в линейчатые поверхности имеют вид:

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} 0 & \Gamma_2^{31} & a^1 & 1 \\ \rho & \Gamma_2^{32} & 0 & 0 \end{Vmatrix} = 2,\ \operatorname{rang}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \Gamma_3^{11} & c \\ \rho & 1 & \Gamma_3^{12} & 0 \end{Vmatrix} = 2.$$

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} \Gamma_1^{21} & \Gamma_1^{31} & a^2 & 1 \\ \Gamma_1^{22} & \Gamma_1^{32} & 0 & 0 \end{Vmatrix} = 2 \tag{16}$$

Разрешая систему (I5) с учетом условий (I6), будем иметь:

$$\Gamma_3^{11} = 0,\ \Gamma_2^{31} = 0,\ \Gamma_1^{32} = 0,\ \Gamma_1^{21} = 0,\ \lambda^1\rho + a^2 = 0,\ \rho\Gamma_1^{31} + 1 = 0,$$

$$2\Gamma_3^{21}\rho + \lambda^1\Gamma_2^{32} = 0,\ a^2\rho + \Gamma_3^{12} = 0,\ \Gamma_2^{32}(\Gamma_1^{31} - \Gamma_3^{21}) = 0, \tag{17}$$

$$(c\rho\Gamma_1^{31}\Gamma_1^{22} \neq 0)$$

Осуществляя нормировку вершин репера таким образом, чтобы единичная точка прямой (A_1A_4) была инцидентна касательной плоскости к фокальной поверхности (A_2) конгруэнции коник C, систему пфаффовых и конечных уравнений расслояемых конгруэнций $(CP)_{2,1}$ типа II приведем к виду:

$$\omega_1^2 = \Gamma_1^{22}\omega_2,\ \omega_1^3 = -\omega_1,\ \omega_1^4 = b\omega_1,\ \omega_2^1 = \omega_2,$$

$$\omega_2^3 = \Gamma_2^{32}\omega_2,\ \omega_3^1 = -a^2\omega_2,\ \omega_3^2 = \Gamma_3^{2k}\omega_k,\ \omega_3^4 = c\omega_1,$$

$$\omega_4^i = a^i\omega_1,\ 2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = -\omega_4^1 + \lambda\omega_2, \tag{18}$$

$$\omega_1^1 - \omega_4^4 = \omega_1^4 - \omega_4^1 + \Gamma_2^{32}\omega_3^4 - a^2\omega_2^3,$$

$$\Gamma^{32}(\Gamma_3^{21} + 1) = 0,\ 2\Gamma_3^{21} - a^1\Gamma_2^{32} \qquad (c\Gamma_1^{22} \neq 0). \tag{19}$$

Отметим, что в случае

$$\Gamma_3^{21} + 1 = 0$$

система уравнений (18)-(19) оказывается несовместной. Осуществив замыкание и продолжение системы (18)-(19) при условии

$$\Gamma_3^{21} + 1 \neq 0$$

получим ряд классов расслояемых конгруэнций $(CP)_{2,1}$ типа II, каждый из которых подробно исследован.

Рассмотрим один из них-конгруэнции $\mathcal{D}$, определяемые следующей системой Пфаффа:

$$\omega_1^2 = \Gamma_1^{22}\omega_2, \ \omega_1^3 = -\omega_1, \ \omega_1^4 = b\omega_1, \ \omega_2^1 = \omega_2,$$

$$\omega_2^3 = 0, \ \omega_3^1 = -a\omega_2, \ \omega_3^2 = \mu\omega_1^2, \ \omega_3^4 = c\omega_1, \tag{20}$$

$$\omega_4^1 = 0, \ \omega_4^2 = a\omega_1, \ 2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = \lambda\omega_2, \ \omega_1^1 - \omega_4^4 = \omega_1^4.$$

Произвол существования конгруэнций $\mathcal{D}$ пять функций одного аргумента.

Т е о р е м а 5. Конгруэнции $\mathcal{D}$ обладают следующими геометрическими свойствами:

1) торсы прямолинейных конгруэнций $(A_1A_2), (A_1A_3), (A_2A_4)$ соответствуют координатным линиям,

2) грани $(A_1A_2A_4), (A_2, A_3A_4)$ репера стационарны вдоль координатных линий $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0$ соответственно,

3) характеристическая точка плоскости $(A_1A_3A_4)$ совпадает

с фокусом прямолинейной конгруэнции (A_1A_3),

4) фокальная поверхность (A_2) конгруэнции коник C вырождается в прямую линию, проходящую через фокус луча A_1A_4 прямолинейной конгруэнции (A_1A_4),

5) линия (P) -прямая, проходящая через фокус луча A_2A_3 конгруэнции (A_2A_3),

6) пара прямолинейных конгруэнций (A_1A_3) и (A_2A_4) расслояема в направлении от (A_1A_3) к (A_2A_4).

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) Торсы всех указанных конгруэнций определяются уравнением

$$\omega_1\omega_2 = 0,$$

что и доказывает теорему.

2) Имеем

$$d[A_1A_2A_4] = (\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_4^4)[A_1A_2A_4] + \omega_1\{[A_1A_2A_3] - [A_3A_2A_4]\},$$

$$d[A_2A_3A_4] = (\omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4)[A_2A_3A_4] + \omega_2\{[A_1A_3A_4] - a[A_2A_1A_4]\}.$$

3) Характеристическая точка N грани $(A_1A_3A_4)$ определяется формулой

$$N = \mu A_1 - A_3.$$

Так как она принадлежит ребру (A_1A_3), то поверхность N является фокальной поверхностью прямолинейной конгруэнции (A_1A_3).

4) Имеем

$$dA_2 = \omega_2^2 A_2 + \omega_2(A_1 + A_4),$$

причем

$$d[A_2, A_1+A_4] = (\omega_1^1+\omega_2^2)[A_2, A_1+A_4]$$

следовательно, (A_2) -прямая линия.

Фокусы sA_1+tA_2 луча A_1A_4 прямолинейной конгруэнции (A_1A_4) определяются уравнением:

$$s(s-t)=0.$$

Координаты точки A_1+A_4 удовлетворяют этому уравнению, следовательно, она действительно является фокусом луча рассматриваемой конгруэнции.

5)Доказательство аналогичное предыдущему.

6)Условия расслоения имеют вид:

$$\omega_3^2\wedge\omega_2^1=0,\quad \omega_1^2\wedge\omega_2^3=0,\quad \omega_1^2\wedge\omega_2^1-\omega_3^2\wedge\omega_2^3=0.$$

В силу системы (19) они удовлетворяются, что и доказывает теорему.

Литература

1.Малаховский В.С.,О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.3, 1973, 41-49.

2.Фиников С.П.,Асимптотически-сопряженные двойные линии Ермолаева.Уч.записки МГПИ, 16, вып.3, 1951, 235-260.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 4 1974

Г.П. Ткач

АФФИННО РАССЛОЯЕМЫЕ ПАРЫ КОНГРУЭНЦИЙ ПАРАБОЛ.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматривается пара Q конгруэнций (F_1) и (F_2) парабол F_1, F_2, плоскости которых пересекаются по линии ℓ, не являющейся диаметром параболы F_i $(i=1,2)$. Построен канонический репер пары Q, исследованы аффинно расслояемые пары Q и некоторые их подклассы.

§1. Канонический репер пары Q.

Пусть d_i -диаметр параболы F_i, проходящей через ту её точку, в которой касательная к параболе параллельна прямой ℓ, K_i -точка пересечения диаметра d_i с прямой ℓ.

Отнесем пару Q к каноническому реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, где вектор $\bar{e}_3$ направлен по прямой ℓ, вектор $\bar{e}_i$ -параллелен диаметру d_i параболы F_i, вершина A канонического репера является серединой отрезка K_1K_2 и векторы $\bar{e}_\alpha$ $(\alpha=1,2,3)$ пронормированы так, что уравнения параболы F_i имеют вид:

$$(x^3)^2-2x^i+2a_i^3x^3+a_i^0=0,\quad x^j=0, \tag{1.1}$$

причем

$$a_1^3+a_2^3=0. \tag{1.2}$$